

## 1 - Теоретическая физика

Абакумова Виктория Александровна, магистрант 1 года обучения  
Томск, Национальный исследовательский Томский государственный университет, физический  
**Мультигамильтонова формулировка расширенной теории Черна-Саймонса с высшими производными**  
Ляхович Семен Леонидович, д.ф.-м.н.

e-mail: [abakumova@phys.tsu.ru](mailto:abakumova@phys.tsu.ru) стр. 44

Гайдучик Александр Викторович, 3 курс  
Томск, Национальный исследовательский Томский государственный университет, физический  
**Анализ систем разделяющихся координат для свободного уравнения Клейна - Гордона**  
Шаповалов Александр Васильевич, д.ф.-м.н.

e-mail: [gaid.alex.vikt@gmail.com](mailto:gaid.alex.vikt@gmail.com) стр. 45

Гурская Альбина Валентиновна,  
Самара, Самарский государственный аэрокосмический университет им. академика С.П.Королёва, физический  
**Перспективы суперсимметричных расширений стандартной модели**

e-mail: [a-gurska@yandex.ru](mailto:a-gurska@yandex.ru) стр. 46

Корепанова Елена Владимировна, магистрант 2 года обучения  
Ижевск, Удмуртский государственный университет, математики, информационных технологий и физики  
**Компьютерное моделирование спиноподобного распада в переохлажденном расплаве Co-Cu**  
Лебедев Владимир Геннадьевич, к.ф.-м.н.

e-mail: [elena.korepanova.mexud@mail.ru](mailto:elena.korepanova.mexud@mail.ru) стр. 46

Лазаренко Георгий Юрьевич, магистрант 1 года обучения  
Томск, Национальный исследовательский Томский государственный университет, физический  
**Вероятность излучения закрученных фотонов ондулятором**  
Казинский Пётр Олегович, д.ф.-м.н.

e-mail: [lazarenko.georgij@icloud.com](mailto:lazarenko.georgij@icloud.com) стр. 48

Мороз Ярослав Валентинович, 4 курс  
Красноярск, Сибирский федеральный университет, институт инженерной физики и радиоэлектроники  
**Модель аккреционного диска «польский пончик» в пространствах с магнитным полем**  
Тегай Сергей Филиппович, к.ф.-м.н.

e-mail: [evrey3579@gmail.com](mailto:evrey3579@gmail.com) стр. 49

Неклюдов Евгений Алексеевич, магистрант 1 года обучения  
Симферополь, Крымский федеральный университет им. В.И.Вернадского, физико-технический институт  
**Фазовые состояния негејзенберговского магнетика со спином 3/2 на треугольной решётке**  
Фридман Юрий Анатольевич, д.ф.-м.н.

e-mail: [nekludov95@rambler.ru](mailto:nekludov95@rambler.ru) стр. 50

Осокин Константин Сергеевич, аспирант 2 года обучения  
Симферополь, Крымский федеральный университет им. В.И.Вернадского, Физико-технический институт  
**Решение уравнений Эйнштейна для замкнутой струны с осевой симметрией**  
Леляков Александр Петрович, к.ф.-м.н.

e-mail: [Oxygen93@ya.ru](mailto:Oxygen93@ya.ru) стр. 52

Харлампова Сайыына Григорьевна, 3 курс  
Якутск, Северо-Восточный федеральный университет, физико-технический институт  
**Индукцированные напряжения в многопроводной линии передачи ограниченной длины при разряде молнии в землю в условиях многолетней мерзлоты**

Григорьев Юрий Михайлович, д.ф.-м.н.  
e-mail: [kharlampieva.s@bk.ru](mailto:kharlampieva.s@bk.ru) стр. 53

# Мультигамильтонова формулировка расширенной теории Черна-Саймонса с высшими производными

*Абакумова Виктория Александровна*

*Томский государственный университет*

*Ляхович Семен Леонидович, д.ф.-м.н., Капарулин Дмитрий Сергеевич, к.ф.-м.н.  
abakumova@phys.tsu.ru*

Расширенная теория Черна-Саймонса (ЧС) с высшими производными представляет собой класс теорий векторного поля  $A=A_\mu dx^\mu$  на  $3d$ -пространстве Минковского, описываемый функционалом действия:

$$S[A] = \frac{1}{2} \int *A \wedge (\alpha_0 m^2 A + \alpha_1 m *dA + \alpha_2 *d*dA + \alpha_3 m^{-1} *d*d*dA + \dots), \quad (1)$$

где  $d$  – дифференциал де Рама,  $*$  – оператор Ходжа,  $\wedge$  – внешнее умножение,  $m$  – постоянная величина, имеющая размерность массы. Безразмерные константы  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$  являются параметрами модели. Теория (1), как и многие другие модели с высшими производными, сталкивается с проблемой неустойчивости, заключающейся в неограниченности снизу канонической энергии. Данная неустойчивость, в свою очередь, создает известные трудности в последовательном описании классической и квантовой динамики теории. В частности, квантовая неустойчивость выражается в наличии духовых полюсов в пропагаторе и отсутствии хорошо определенного вакуумного состояния с наименьшей энергией.

В настоящей работе изучается проблема устойчивости расширенной теории ЧС в гамильтоновой форме уравнений. Показывается, что классическая и квантовая устойчивость может быть обеспечена, если теория допускает гамильтонову формулировку с ограниченным снизу гамильтонианом. При этом ограниченный гамильтониан не обязательно совпадает с канонической энергией модели, выраженной в переменных фазового пространства, и не получается из канонического гамильтониана заменой переменных. Скобка Пуассона, отвечающая гамильтоновой формулировке с ограниченным гамильтонианом, также оказывается неканонической. Поэтому построенные нами гамильтоновы формулировки не эквивалентны канонической гамильтоновой формулировке Остроградского [1,2] и приводят к неэквивалентной квантовой динамике, которая оказывается устойчивой.

Конкретные вычисления выполнены в калибровочной расширенной теории ЧС 3-го и 4-го порядка. Данные модели описываются функционалом действия (1), где параметры  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$  подчинены условиям

$$\alpha_k \neq 0, \quad \alpha_0 = \alpha_{k+1} = \alpha_{k+2} = \dots = 0. \quad (2)$$

Числовой параметр  $k=3$  для теории 3-го порядка и  $k=4$  – в теории 4-го порядка. Эти модели изучались в [3] и [4]. Показано, что теория (1) с параметрами, подчиненными условию (2), помимо канонической энергии допускает в теории 3-го порядка один, а в теории 4-го порядка – два дополнительных интеграла движения. Дополнительные интегралы движения могут быть ограничены снизу, даже если каноническая энергия модели не ограничена снизу. Их появление связано с наличием в теории с высшими производными дополнительной высшей симметрии, не имеющей аналога в модели более низкого порядка. Линейное комбинирование канонической энергии и дополнительных интегралов движения позволяет получить в теории 3-го прядка двухпараметрическое, а в теории 4-го порядка – трехпараметрическое семейство интегралов движения, в котором при некоторых ограничениях на коэффициенты линейной комбинации также могут содержаться ограниченные представители. Наличие ограниченного интеграла движения связано с унитарностью представления группы Пуанкаре, описываемого действием (1): для унитарных представлений ограниченный интеграл движения существует, в то время как в случае неунитарных представлений интеграл движения не ограничен снизу всегда. В тех случаях, когда семейство ограниченных интегралов движения в модели существует, этот интеграл движения интерпретируется как альтернативная энергия, а соответствующая модель рассматривается как устойчивая.

Гамильтонова формулировка со связями для теории (1) строится стандартным образом. Сначала вводятся дополнительные переменные, поглощающие производные исходных переменных. В результате данного шага мы приходим к системе уравнений первого порядка, включающей эволюционные уравнения первого порядка и связи. Далее в качестве гамильтониана рассматриваемой теории выбирается сумма ее наиболее общей ограниченной сохраняющейся величины и слагаемых, пропорциональных связям. Затем находятся соответствующие полученному гамильтониану скобки Пуассона. Нахождение скобок Пуассона сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений. Данная система уравнений может быть решена с использованием пакетов символьных вычислений. Полученная скобка Пуассона однозначно восстанавливается из вида гамильтониана с точностью до естественного произвола, связанного с наличием калибровочной симметрии, и является невырожденной. Симплектическая форма, ассоциированная с этой скобкой Пуассона,

определяет семейство действий первого порядка, приводящих к одним и тем же классическим уравнениям движения.

Таким образом, показано, что калибровочная расширенная теория ЧС 3-го порядка допускает двухпараметрическое, а теория 4-го порядка – трехпараметрическое семейство гамильтоновых формулировок, приводящих к одним и тем же классическим уравнениям движения. При этом, в зависимости от параметров модели, данное семейство может содержать гамильтоновы формулировки с ограниченным снизу гамильтонианом. В тех случаях, когда ограниченный гамильтониан допускается моделью, перечисленные факты позволяют обеспечить устойчивость теории на классическом и квантовом уровне, а наличие семейства гамильтоновых формулировок позволяет говорить о мультигамильтоновости модели (1). В заключение отметим, что гамильтонова формулировка с ограниченным гамильтонианом допускает самосогласованное включение неминимальных взаимодействий со спинорным полем, сохраняющих устойчивость.

Список публикаций:

[1] *Остроградский М. В. // Вариационные принципы механики: под ред. Л. С. Полака. – М.: Физматгиз, 1959. – С. 315-387.*

[2] *Гитман Д. М., Тютин И. В. // М.: Наука, 1986. – 216 с.*

[3] *Abakutova V. A., Kaparulin D. S., Lyakhovich S. L. // Eur. Phys. J. C. 2018. V. 78. No. 2. P. 115.*

[4] *Абакумова В. А., Капарулин Д. С., Ляхович С. Л. // Изв. вузов. Физика. 2017. Т. 60. № 12. С. 40-47.*

## **Анализ систем разделяющихся координат для свободного уравнения Клейна - Гордона**

**Гайдучик Александр Викторович**

*Национальный исследовательский Томский государственный университет*

*Шановалов Александр Васильевич, д.ф.-м.н.*

*[Gaid.alex.vikt@gmail.com](mailto:Gaid.alex.vikt@gmail.com)*

**Введение.** В 1972-74 годах была решена задача разделения переменных в уравнении Клейна-Гордона - в серии работ [1] — [4]. Были найдены все типы внешних электромагнитных полей, задаваемых произвольными функциями, допускающих разделение переменных в уравнении Клейна-Гордона, а также криволинейных координат, в которых это разделение производится. Уравнения с полями явно выписаны в разделенных координатах. В работах приведено свыше 50 наборов разделяющихся криволинейных координат, и соответственно, столько же типов электромагнитных полей. Задача была решена на основе полных наборов операторов симметрии, допускаемых уравнением. Под оператором симметрии имеется ввиду линейный дифференциальный оператор, не выше второго порядка, коммутирующий с оператором уравнения (гамильтонианом). Несколько операторов симметрии называют полным набором, если они удовлетворяют дополнительным условиям, которые приведены в [1]. Каждому полному набору операторов симметрии уравнения соответствуют координаты, в которых уравнение допускает разделение переменных, и внешнее поле, с которым переменные могут быть поделены. Уравнение Клейна - Гордона в произвольной криволинейной системе координат пишем в следующем виде (подразумеваем суммирование по повторяющимся индексам, если не оговорено другое):

$$(g^{kl}P_kP_l - m^2)\psi = 0 \quad (1)$$

Здесь  $g^{kl}$  - метрический тензор,  $P_k = i\nabla_k - eA_k$ ,  $k, l = 0, 1, 2, 3$ ,  $\nabla_k$  — ковариантная производная по отношению к  $x^k$  в пространстве Минковского с метрическим тензором  $g^{kl}(x)$ ;  $A_k$  - ковариантные компоненты потенциала электромагнитного поля,  $e$  - заряд электрона,  $i$  — мнимая единица,  $m$  - масса частицы,  $\psi$  - волновая функция частицы. В декартовых координатах будем пользоваться метрикой сигнатуры (+, —, —, —) всюду. Тензор электромагнитного поля определяем как  $F_{ki} = \partial_k A_i - \partial_i A_k$ . Всяду используется естественная система единиц  $\hbar = c = 1$ .

**Новизна проблемы.** Был проведен анализ приведенных в работах [1], [2], [3], [4] криволинейных систем разделяющихся координат. Проверены известные системы разделяющихся координат для свободного уравнения Клейна-Гордона на предмет наличия определенных во всем пространстве физических переменных формул обратной замены. Для наборов операторов симметрии, которым соответствуют разделяющиеся координаты с не соответствующими требованиям формулами обратной замены, задача разделения переменных была решена заново, и найдены модифицированные системы разделяющихся координат, обладающие требуемым качеством. В модифицированных координатах разделение переменных осуществляется во всех областях пространства - времени.

**Значение.** Модифицированные разделяющиеся координаты позволяют проводить разделение переменных единообразно как в пространственно-подобных областях, так и во времени - подобных. Ожидается, что полученные модифицированные системы координат позволят исследовать проблему полноты для решений уравнения Клейна-Гордона, получающихся в разделенных координатах.

**Полученные результаты.** Получены искомые системы разделяющихся координат в более общей форме, чем известные из работ [1-4]. Для класса электромагнитных полей, допускающих разделение переменных в классе модифицированных криволинейных системах координат, получены явные выражения. Выписаны уравнения Максвелла для этих полей в явном виде. В дальнейшем планируется провести проверку полноты решений уравнения Клейна-Гордона, полученных в модифицированных разделяющихся координатах.

Список публикаций:

- [1] Багров В.Г., Мешков А.Г., Шаповалов В.Н., Шаповалов А.В. Разделение переменных в уравнении Клейна – Гордона I // Известия ВУЗов, Физика. 1973, Ноябрь. №11. стр. 66-72.
- [2] Известия ВУЗов, Физика. 1973, Декабрь. №12. стр. 45-52.
- [3] Известия ВУЗов, Физика. 1974, Июнь. №6. стр. 74-78.
- [4] Известия ВУЗов, Физика. 1975, Март. №3. стр. 152-154.

## **Перспективы суперсимметричных расширений стандартной модели**

*Гурская Альбина Валентиновна*

*Долгополов Михаил Вячеславович*

*Самарский государственный аэрокосмический университет им. академика С.П. Королёва*

*[a-gurska@yandex.ru](mailto:a-gurska@yandex.ru)*

В докладе рассматриваются модели квантовой теории поля МССМ и НМССМ, которые среди суперсимметричных моделей являются наиболее актуальными на сегодня, так как масштаб энергии реализации данных моделей соответствует энергиям, достигнутым на Большом адронном коллайдере в данный момент. Проводится обзор результатов экспериментов по поиску суперсимметричной физики на БАК, а также в прямом детектировании, регистрации продуктов возможной аннигиляции частиц темной материи, микролинзировании компактных объектов в астрономических наблюдениях.

Проводится обзор ограничений на массы суперсимметричных частиц (как экспериментальных, так и модельных), в том числе, нейтралино, которая рассматривается в качестве частицы-кандидата на роль темной материи. Исходя из ограничений показаны возможности развития моделей, их «жизнеспособность», направления их развития.

Представляются результаты теоретического исследования сектора Хиггса в НМССМ, введение СР-нарушения для попытки объяснить барионную асимметрию, исследование фазовых переходов. Приведены несколько сценариев проявления суперсимметричной физики в рамках НМССМ: 1) сценарий, соответствующий сильному электрослабому фазовому переходу первого рода; 2) сценарий тяжелых бозонов Хиггса. Также рассматривается температурный подход к исследованию потенциала Хиггса и следствия для космологии.

## **Компьютерное моделирование спиноподального распада в переохлажденном расплаве Co-Cu**

*Корепанова Елена Владимировна*

*Удмуртский государственный университет*

*Лебедев Владимир Геннадьевич, к.ф.-м.н.*

*[elena.korepanova.mexud@mail.ru](mailto:elena.korepanova.mexud@mail.ru)*

Качественные оценки [1] для системы  $\text{Co}_{50}\text{Cu}_{50}$  при скоростях охлаждения  $10^6\div 10^7\text{K/s}$  показывают, что спиноподальный распад в жидком состоянии должен протекать до начала затвердевания расплава Co-Cu, переохлажденного из жидкой фазы в область спиноподали. Однако нельзя отрицать, что в сильно переохлажденном состоянии процессы затвердевания и спиноподального распада могут существенно влиять друг на друга [2]. Целью представленной работы является более точная количественная оценка взаимодействия данных процессов на основе метода фазового поля [3].

Фазовое поле  $\phi$  [3] (параметр порядка) однозначно описывает локальное состояние сплошной среды с фазовым состоянием системы. Однозначность нарушается только вблизи границы раздела фаз, малой, но конечной толщины. Пренебрегая изменением плотности фаз при фазовых превращениях, полагаем, что каждая фаза  $\alpha=L, S$  ( $L$  – жидкая и  $S$  – твердая) описываются объемными потенциалами Гиббса  $G^\alpha = G^\alpha(T, x^\alpha)$  как функциями температуры  $T$  и мольных концентрация примеси  $x^\alpha$ . Дифференциал потенциалов Гиббса при постоянной температуре  $T$  имеет вид:  $dG^\alpha = \mu^\alpha dx^\alpha$ , где  $\mu^\alpha = (\delta G^\alpha / \delta x^\alpha)|_T = \text{const}$  - химические потенциалы фаз. Объемные свойства фаз внутри диффузной границы интерполируются с помощью гладких функций вида [3]:

$$\xi(\phi) = \phi^2(3 - 2\phi), \quad g(\phi) = \phi^2(1 - \phi)^2.$$

Тогда полная объемная плотность энергии Гиббса  $G(T, \{x^\alpha\}, \phi)$  может быть записана как:

$$G \equiv G(T, \{x^\alpha\}, \phi) = \sum_{\alpha} G^{\alpha}(T, x^{\alpha}) \xi^{\alpha}(\phi) + Wg(\phi),$$

где  $\xi^S = \xi(\phi)$ ,  $\xi^L = 1 - \xi(\phi)$ . Величина  $W$  - высота потенциального барьера.

Поскольку равновесная плотность энтропии фазы  $\alpha$  равна

$$S^{\alpha} = -\frac{\partial}{\partial T} G^{\alpha} \equiv -G_T^{\alpha},$$

дифференцирование полной объемной плотности потенциала Гиббса по температуре дает полную объемную плотность равновесной энтропии  $S_{eq}$  как суперпозицию вкладов отдельных фаз

$$S_{eq} = -G_T = -\sum_{\alpha=S,L} G_T^{\alpha} \xi^{\alpha}.$$

В силу аддитивности энтропии, наличие фазовой границы в рамках среднего поля и наличие корреляций концентрации описывается локально-равновесными градиентными вкладами вида [4]:

$$S_{le} = -\frac{1}{2T_0} [\sigma(\nabla\phi)^2 + \sum_{\alpha} \varepsilon^{\alpha} (\nabla(\xi^{\alpha} x^{\alpha}))^2],$$

где величина  $\sigma$  связана с поверхностной энергией на границе фаз, а  $\varepsilon^{\alpha}$  пропорциональна квадрату корреляционной длины для концентрации в фазе  $\alpha$ . Параметр  $T_0$  является некоторой характерной температурой, позволяющей превратить энергию в величину с размерностью энтропии. Вид корреляционного вклада  $(\nabla(\xi^{\alpha} x^{\alpha}))$  обусловлен как предельной ситуацией, так и физическим смыслом переменных  $x^{\alpha}$ . Отсутствие локального равновесия [5] может быть описано вкладами от теплового  $\mathbf{J}_T$  и диффузионного потоков  $\mathbf{J}_D$ , а также от скорости изменения фазового поля  $\dot{\phi}$ :

$$S_{ne} = -\frac{1}{2T_0} [\beta \mathbf{J}_T^2 + \chi \mathbf{J}_D^2 + \gamma \dot{\phi}^2],$$

где  $\beta, \chi, \gamma$  - некоторые кинетические коэффициенты, подлежащие определению. Динамика процесса затвердевания управляется полной энтропией системы  $S$ , которую представим как

$$S = \int (S_{eq} + S_{le} + S_{ne}) dV,$$

где  $dV$  - элемент объема сплошной среды.

Используя принцип неубывания энтропии [5] в процессах релаксации и разделяя процессы диффузии [6]

$$\dot{x}^{\alpha} \xi^{\alpha} = -\xi^{\alpha} \nabla \cdot \mathbf{J} - \dot{\phi} \theta(\xi^{\alpha}) \sum_{\beta} \xi^{\beta'} x^{\beta} - F_{\alpha},$$

с помощью функций Хэвисайда  $\theta(\xi^{\alpha})$ , в разных фазах, приходим к системе уравнений:

$$\begin{aligned} \tau_T \mathbf{J}_T + \mathbf{J}_T &= M_T \nabla \left( \frac{T_0}{T} \right), \\ \tau_D \mathbf{J}_D + \mathbf{J}_D &= -M_D \nabla \left( \frac{T_0}{T} \sum_{\alpha} \tilde{\mu}^{\alpha} \xi^{\alpha} \right), \\ \tau_{\phi} \dot{\phi} + \dot{\phi} &= M_{\phi} [\nabla(\sigma \nabla \phi) - \sum_{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta} - \frac{T_0}{T} (Wg'(\phi) + \Delta\Omega \xi'(\phi))], \end{aligned}$$

где  $\Delta\Omega = G^S - G^L - \Delta x \sum_{\alpha} \mu^{\alpha} \theta(\xi^{\alpha})$  - движущая силы на диффузной границе раздела фаз. Вклад корреляций обозначен как

$$\Gamma_{\alpha\beta} = \nabla[\varepsilon^{\alpha} \nabla(\xi^{\alpha} x^{\alpha})] \xi^{\beta'} x^{\beta} (\theta(\xi^{\alpha}) - \delta_{\alpha\beta}).$$

Эффективные химпотенциалы равны:  $\tilde{\mu}^{\alpha} = \mu^{\alpha} - \frac{T}{T_0} \nabla[\varepsilon^{\alpha} \nabla(\xi^{\alpha} x^{\alpha})]$ .

Полученная система уравнений моделировалась численно для изучения влияния корреляций на зависимость скорости движения фронта затвердевания от переохлаждения и исследования влияния фазовых превращений на процесс спиноподобного распада.

Список публикаций:

- [1] E. Davidoff, P.K. Galenko, D.M. Herlach, M. Kolbe, N. Wanderka, *Acta Materialia* 61 (2013) 1078–1092
- [2] A. Oprisan, S. A. Oprisan, J.J. Hegseth, Y. Garrabos, C. Lecoutre-Chabot, D. Beysens, *Phys. Rev. E* 77, 051118 (2008)
- [3] N. Provatas, K. Elder, *Phase-Field Methods in Materials Science and Engineering*, Wiley-VCH Weinheim, (2010).
- [4] J. W. Cahn, J. E. Hilliard, *J. Chem. Phys.* 28, 258 (1958).
- [5] P. Galenko, D. Jou, *Phys. Rev. E* 71, 046125 (2005).
- [6] V. G. Lebedev, P. K. Galenko, *Russ. Metall. (Metally)*, 8, 785–792 (2016).

## Вероятность излучения закрученных фотонов в ондуляторе

Лазаренко Георгий Юрьевич

Богданов Олег Викторович, Казинский Пётр Олегович

Национальный исследовательский Томский государственный университет

Казинский Пётр Олегович

[lazarenko.georgij@icloud.com](mailto:lazarenko.georgij@icloud.com)

Первые математические описания фотона имеющего угловой момент были даны в работах 1897 года [1] и 1909 [2]. Экспериментальное подтверждение наличия момента у фотона были в 1936 году [3]. На сегодняшний день имеются разработанные методики получения и детектирования подобного рода электромагнитного излучения [4]. Данное направление деятельности интересно тем, что заставляет нас по-новому посмотреть на широко развитую теорию излучения не учитывающую наличия углового момента у электромагнитных волн. Также оно имеет ряд важных практических применений: возможность передачи больших объёмов информации, более детальный анализ наблюдаемого излучения, а также в конструирование молекулярных пинцетов.

Нами была рассмотрена модель классического тока, генерирующего закрученное излучение, что является хорошим приближением в тех случаях, когда квантовой отдачей можно пренебречь. Например, для лазерного излучения с энергиями фотонов порядка 1 эВ и интенсивностями 1020 Вт/см<sup>2</sup> это ограничение говорит, что энергии электронов, двигающихся в поле лазерного излучения, должны быть меньше 2,5 ГэВ. Такие электроны могут генерировать фотоны с энергиями порядка 250 МэВ, и такое излучение достаточно хорошо описывается формулами классической электродинамики. Более того, классические токи, излучающие скрученные фотоны, уже использовались в теоретических исследованиях [5], и эффективность генерации скрученных фотонов такими источниками была подтверждена экспериментально [6].

В работе выведена формула для вероятности излучения закрученного фотона классическим током [7]. В качестве примера применения общей формулы было рассмотрено ондуляторное излучение, как наиболее вероятный источник подобного рода излучения. Получены явные формулы для вероятности излучения закрученного фотона в дипольном режиме и в режиме виглера. Установлено, что для излучения вблизи оси идеально правого спирального ондулятора проекция полного момента  $m$  совпадает с номером гармоники  $n$ , а для левого  $m = -n$ . Обнаружено, что прямое излучение плоским ондулятором подчиняется правилу отбора, согласно которому  $n+m$  должно быть четным числом. Оказывается, что среднее число закрученных фотонов, создаваемых ондулятором вдоль оси, является периодической функцией  $m$  в некотором интервале квантовых чисел  $m$ .

В дипольном приближении трудно добиться большой проекции углового момента на один фотон в излучении, создаваемым движущимся в ондуляторе электроном. В оптимальном случае он имеет значение проекции момента  $m=1$  для правой спиральной траектории и  $m=-1$  для левой, когда используется почти прямое излучение ондулятора.

Полученные аналитические результаты согласуются с проделанным численным моделированием. Точность аналитических формул возрастает с увеличением числа секций ондулятора  $N$ . Таким образом, мы можем сделать вывод, что полученная нами общая формула является надежным и эффективным инструментом для дальнейших исследований генерации закрученных фотонов классическими токами.

Выражаем благодарность В.Г. Багрову и Д.В. Карловцу за плодотворные беседы. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 17-72-20013).

Список публикаций:

- [1] L. A. I. Sadovskiy, "Ponderomotive forces of the electromagnetic and light waves", *Journal of the Russian Physico-Chemical Society, Physical Section* 29, 82 (1897) [in Russian].
- [2] J. H. Poynting, "The wave motion of a revolving shaft, and a suggestion as to the angular momentum in a beam of circularly polarised light", *Proc. Roy. Soc. London A* 82, 560 (1909).
- [3] R. A. Beth, "Mechanical detection and measurement of the angular momentum of light", *Phys. Rev. Lett.* 50, 115 (1936).
- [4] M. J. Padgett, "Orbital angular momentum 25 years on", *Optics Express* 25, 11267 (2017).
- [5] Y. Taira, T. Hayakawa, M. Katoh, "Gamma-ray vortices from nonlinear inverse Thomson scattering of circularly polarized light", *Scientific Reports* 7, 5018 (2017).
- [6] J. Bahrdt et al., "First observation of photons carrying orbital angular momentum in undulator radiation", *Phys. Rev. Lett.* 111, 034801 (2013).
- [7] O.V. Bogdanov, P.O. Kazinski and G. Yu. Lazarenko, "Probability of radiation of twisted photons by classical currents", *arXiv:1712.06140v3*.

## Модель аккреционного диска «польский пончик» в пространствах с магнитным полем

Мороз Ярослав Валентинович

Сибирский федеральный университет

Тезай Сергей Филиппович

[evrey3579@gmail.com](mailto:evrey3579@gmail.com)

В настоящее время теория аккреции представляет огромный интерес в связи с тем, что аккреционные диски играют важную роль в изучении физики различных объектов, таких как квазары, активные ядра галактик и черные дыры [1].

Одной из простейших моделей аккреционного диска является модель «польского пончика», учитывающая гравитацию только центрального объекта, а не самого диска. Вещество диска в таких моделях описывается идеальной жидкостью с тензором энергии-импульса  $T_{\beta}^{\alpha} = (p + \rho)u^{\alpha}u_{\beta} - pg_{\alpha\beta}$ , где  $p, \rho, u^{\alpha}$  – давление, плотность и 4-скорость, а  $g_{\alpha\beta}$  – метрический тензор фонового пространства. Распределение вещества описывается законом сохранения

$$T_{\beta;\alpha}^{\alpha} = 0. \quad (1)$$

В аксиально симметричном случае из (1) следует следующая форма релятивистского уравнения Эйлера

$$\frac{\vec{v}p}{p+\rho} = -\frac{1}{2} \frac{\vec{v}g^{tt} - 2L\vec{v}g^{t\varphi} + L^2\vec{v}g^{\varphi\varphi}}{g^{tt} - 2Lg^{t\varphi} + L^2g^{\varphi\varphi}}, \quad (2)$$

где  $L$  – удельный момент импульса [2].

«Польские пончики» для пространств Шварцшильда и Керра хорошо изучены [1–5]. В нашей работе мы рассматриваем влияние магнитного поля на подобные модели. Для этого мы выбираем в качестве фонового пространства два разных точных решения уравнений Эйнштейна с магнитным полем: решение Эрнста [6] и решение Боннора [7]. Первое может быть интерпретировано как гравитационное поле массивного тела, помещенного в однородное внешнее магнитное поле. Во втором случае магнитное поле имеет дипольный характер.

Для описания распределения вещества в аккреционных дисках мы численно находим из уравнения (2) поверхности постоянного давления. Полученные поверхности для разных видов фоновых пространств изображены на рис. 1.

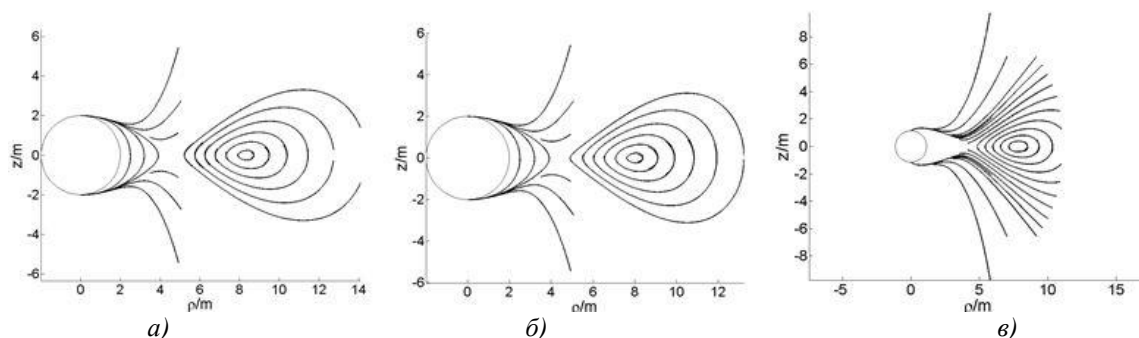


рис. 1. Распределение вещества аккреционного диска с моментом импульса  $L = 3.8m$  в пространстве: а) Шварцшильда; б) Эрнста с магнитным полем  $B=0.009m$ ; в) Боннора с магнитным моментом  $b = 0.2m$ , – где  $m$  – масса центрального объекта в геометрической системе единиц

Видно, что слабое магнитное поле не меняет структуры аккреционного диска, содержащей две особые точки: седло и центр. Рост магнитного поля приводит к сближению особых точек и к увеличению момента импульса вещества, обращающегося вокруг центрального объекта, необходимого для существования диска. При достижении магнитным полем величины, равной половине массы центрального объекта (в геометрической системе единиц), решения, описывающие «польский пончик» в пространстве Эрнста, перестают существовать, так как у уравнения (2) не будет особых точек над горизонтом. Для решения Боннора по крайней мере две особые точки существуют при любых ненулевых значениях момента и магнитного поля.

Список публикаций:

- [1] Abramowicz M. A. // *Living Rev. Relativity*. 2013. Т. 16. С. 1.
- [2] Qian L., Abramowicz M. A., Fragile P. C., Horak J., Machida M., Straub O. // *A&A*. 2009. Т. 498. С. 471.
- [3] Abramowicz M. A. et al. // *A&A*. 1978. Т. 63. С. 221.
- [4] Sikora M. // *Mon. Not. R. astr. Soc.* 1981. Т. 196. С. 257.
- [5] Chakrabarti S. K. // *ApJ*. 1985. Т. 288. С.1.
- [6] Esteban E. P. // *Il nuovo cimento B*. 1984. Т. 79. С. 76.
- [7] Kovar J., Kopacek O., Karas V., Kojima Yasufumi // *Classical and Quantum Gravity*. 2012. Т. 30. С. 025010.

## Фазовые состояния негејзенберговского магнетика со спином 3/2 на треугольной решётке

*Неклюдов Евгений Алексеевич*

*Фридман Юрий Анатольевич, Клевец Филипп Николаевич*

*Физико-технический институт КФУ имени В.И. Вернадского*

*Фридман Юрий Анатольевич, д.ф.-м.н.*

*[nekludov95@rambler.ru](mailto:nekludov95@rambler.ru)*

Для изотропных магнетиков с  $S > 1/2$  при наличии высших по спинам обменных слагаемых типа  $(\mathbf{S}_i \mathbf{S}_j)^n$ ,  $n = 2S$ , возможна реализация не только фаз с отличным от нуля средним значением спина (дипольного параметра порядка  $\langle \mathbf{S} \rangle$ ), но также и фаз с  $\langle \mathbf{S} \rangle = 0$ , в которых спонтанное нарушение вращательной симметрии обусловлено средними значениями спиновых мультиполей, например, квадрупольными средними  $S^{ij} = \langle S^i S^j + S^j S^i \rangle / 2$ . Такое состояние, названное спиновым нематиком (SN), было найдено для магнетиков со спином  $S = 1$  [1,2]. Для спина  $S = 3/2$  на квадратной решетке найдены фазы с  $\langle \mathbf{S} \rangle = 0$ , для которых симметрия относительно отражения времени нарушена за счет нетривиальных свойств трёхспиновых средних [3,4]. В силу этого для спина  $S = 3/2$  на квадратной решетке возможно существование антинематической (SAN) фазы, в которой направления вектор-директора в двух подрешетках антипараллельны [4].

Исследования простейшей модели спинового нематика позволяют утверждать, что подобного рода системы обладают целым рядом необычных свойств. На протяжении последних двадцати лет такие состояния активно изучались в кристаллических магнетиках [5], включая низкоразмерные системы [3,6]. В настоящее время появился дополнительный интерес к таким состояниям, связанный с изучением свойств ультрахолодных ферми-газов, примером которых являются газы  $^{132}\text{Cs}$ ,  $^9\text{Be}$ ,  $^{135}\text{Ba}$  со спином  $S = 3/2$  в оптических решетках, в которых на одну ячейку приходится один атом [7].

В качестве исследуемой модели в данной работе был рассмотрен изотропный магнетик со спином магнитного иона  $S = 3/2$ , имеющий треугольную кристаллическую решетку. В общем случае гамильтониан системы со спином 3/2 и изотропным обменным взаимодействием между ближайшими соседями, учитывающим все возможные спиновые инварианты, имеет вид:

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \sum_{n,n'} J(n-n') (\mathbf{S}_n \mathbf{S}_{n'}) - \frac{1}{2} \sum_{n,n'} K(n-n') (\mathbf{S}_n \mathbf{S}_{n'})^2 - \frac{1}{2} \sum_{n,n'} L(n-n') (\mathbf{S}_n \mathbf{S}_{n'})^3 \quad (1)$$

где  $\mathbf{S}_n$  – спиновый оператор в  $n$ -ом узле,  $J$ ,  $K$  и  $L$  – обменные интегралы между ближайшими спинами, суммирование в (1) производится по всем ближайшим соседям треугольной решетки и каждая пара ближайших соседей учитывается один раз. После выделения средних полей и унитарных преобразований, гамильтониан системы может быть записан в виде

$$\mathcal{H}_0 = \sum_i E_i(\theta, \alpha) X^{ii} \quad (2)$$

где  $\theta$  – угол между локальными осями квантования подрешёток,  $\alpha$  – параметр диагонализации.

Решая с данным гамильтонианом стационарное уравнение Шрёдингера, были получены энергетические уровни рассматриваемой системы. В случае низких температур ( $T \rightarrow 0$ ) свободная энергия системы совпадает с её нижайшим энергетическим уровнем. Исследуя свободную энергию, были установлены возможные устойчивые фазовые состояния системы – ферромагнитная и антиферромагнитная фазы, а также нематическая и антинематическая.

Фазовые состояния рассматриваемой системы характеризуются ненулевыми квадрупольными и октупольными средними. Квадрупольные средние, в отличие от системы со спином  $S = 1$ , не являются определяющими для описания симметрии фаз, а в векторных фазах октупольный параметр равен нулю. Фазовая диаграмма системы представлена на рисунках (рис. 1 a,b,c).



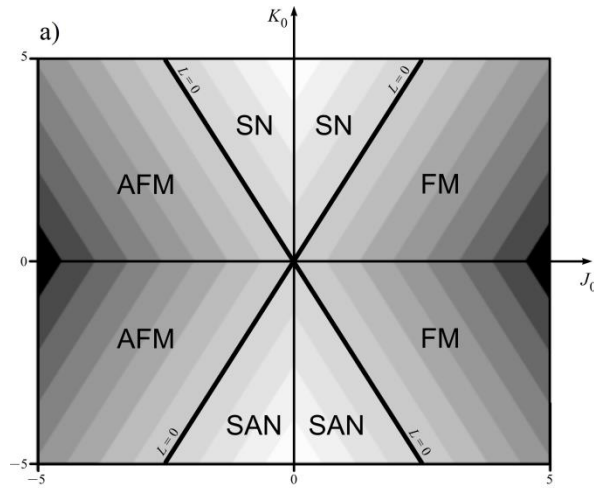


рис. 1.a. Сечение фазовой диаграммы при  $L=0$ .

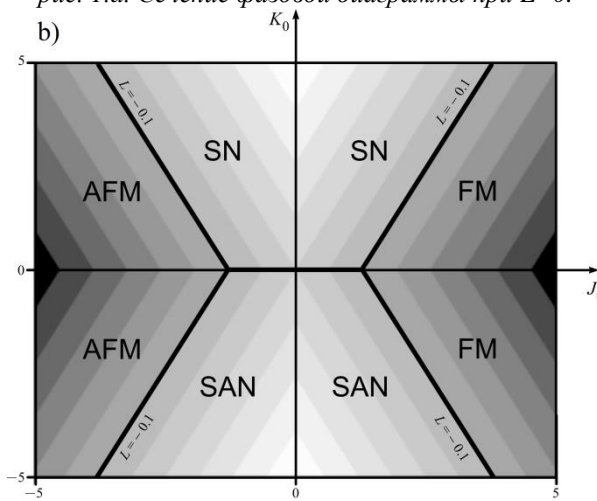


рис 1.b. Сечение фазовой диаграммы при  $L<0$ .

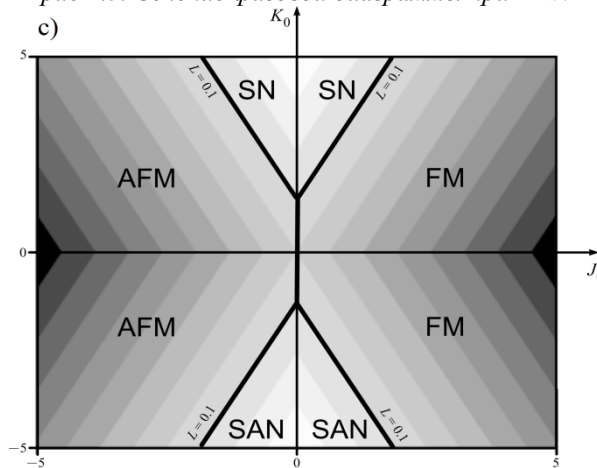


рис. 1.c. Сечение фазовой диаграммы при  $L>0$ .

Список публикаций:

- [1] A. Läuchli, G. Schmid, and S. Trebst, *Phys. Rev.* 74, 144426 (2006).
- [2] N. Papantolaou, *Nucl. Phys.* 305, 367 (1988).
- [3] A. Läuchli, F. Mila, and K. Penc, *Phys. Rev. Lett.* 97, 087205 (2006).
- [4] О.А. Космачёв, Ю.А. Фридман, Е.Г. Галкина, Б.А. Иванов, *ЖЭТФ* 147, 320 (2015).
- [5] V.M. Loktev and V.S. Ostrovskii, *Low Temp. Phys.* 20, 775 (1994).
- [6] A. Läuchli, G. Schmid, and S. Trebst, *Phys. Rev. B* 74, 144426 (2006).
- [7] C. Wu, *Mod. Phys. Rev. Lett.* B 20, 1707 (2006).

## Решение уравнений Эйнштейна для замкнутой струны с осевой симметрией

Осокин Константин Сергеевич

Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского

Леляков Александр Петрович, к.ф.-м.н.

[Oxygen93@ya.ru](mailto:Oxygen93@ya.ru)

Космические струны – это одномерные топологические дефекты, которые, согласно предсказаниям Калибровочных Теорий Великого Объединения (ТВО), могли образовываться в ранней Вселенной в процессе фазовых переходов [1]. В работе [2] было показано, что наличие таких объектов во Вселенной не противоречит наблюдаемому микроволновому реликтовому излучению. Также не исключается, что космические струны могли сохраниться до современной эпохи и могут быть наблюдаемыми.

Космическая струна характеризуется линейной плотностью  $\rho_l$  и радиусом поперечного сечения  $r_s$ . Для струн, фигурирующих в моделях ТВО, эти параметры связаны с типичным масштабом масс теории  $m_{GUT}$  и постоянной Хиггса  $\lambda$  следующими уравнениями:

$$\frac{G}{c^2} \rho_l = \lambda^{-1} \left( \frac{m_{GUT}}{m_{Pl}} \right)^2, \quad r_s = l_{Pl} \left( \frac{m_{Pl}}{m_{GUT}} \right),$$

где  $m_{Pl}$  и  $l_{Pl}$  – планковские масса и длина соответственно;  $G$  – гравитационная постоянная,  $c$  – скорость света. Если в данных уравнениях положить  $m_{GUT} = 10^{15}$  ГэВ,  $\lambda \approx 10^{-2}$ , то радиус поперечного сечения космической струны можно оценить, как

$$r_s \approx 10^{-31} \text{ м}$$

Нуль струны реализуют предельный случай нулевого натяжения для струн Намбу-Гото [3]. В таком пределе точки нуль-струны взаимодействуют лишь с внешним гравитационным полем, но не друг с другом. При этом скорость всех точек струны равна скорости света. Так как натяжение струны измеряется отрицательными степенями планковской массы  $m_{Pl}$ , то предел нулевого натяжения соответствует асимптотически большим масштабам энергии  $E \gg m_{Pl}$  [4]. С этой точки зрения нуль-струны реализуют высокотемпературную фазу теории струн, то есть могли образовываться на ранних стадиях эволюции Вселенной.

Исследование движения пробной нуль-струны в гравитационном поле замкнутой нуль-струны постоянного и переменного радиуса показало наличие для пробной нуль-струны только «узкой» области, находясь в которой она может взаимодействовать с нуль-струной, порождающей гравитационное поле, что говорит о возможности реализации «зернистой» структуры пространства, заполненного газом нуль-струн [5]-[6]. Наличие для каждой пробной нуль-струны попавшей в «зону взаимодействия» аномальных участков траектории, на которых пробная нуль-струна за очень короткий промежуток времени или ускоренно выталкивается на бесконечность или ускоренно притягивается из бесконечности, подтверждает, хотя и косвенно, гипотезу о возможной струнной природе механизма инфляции Вселенной.

В данной работе произведен поиск решения уравнений Эйнштейна для «размазанной» замкнутой нуль-струны с осевой симметрией, движущейся ортогонально плоскости, в которой она расположена.

Список публикаций:

- [1] A.D. Linde, *Particle Physics and Inflationary Cosmology*, Princeton University Press, (1994).
- [2] C.T. Hill, D.N. Schramm and J.N. Fry, *Commun Nucl. Part. Phys.* 19, 25 (1999).
- [3] A. Schild, *Phys. Rev. D* 16, 1722 (1977).
- [4] I.A. Bandos, A.A. Zheltukhin, *Fortschr. Phys.* 41, 619 (1993).
- [5] A.P. Lelyakov, *Gravitation and Cosmology* 21, No.4, 309 (2015).
- [6] O.P. Lelyakov, A.S. Karpenko, R.-D.O. Babadzhan, *Ukr. J. Phys.* 59, 1114 (2014).

## Индукцированные напряжения в 2-х и 3-х проводных коротких линиях передачи при разряде молнии в землю в условиях многолетней мерзлоты

*Харлампьева Сайыына Григорьевна*

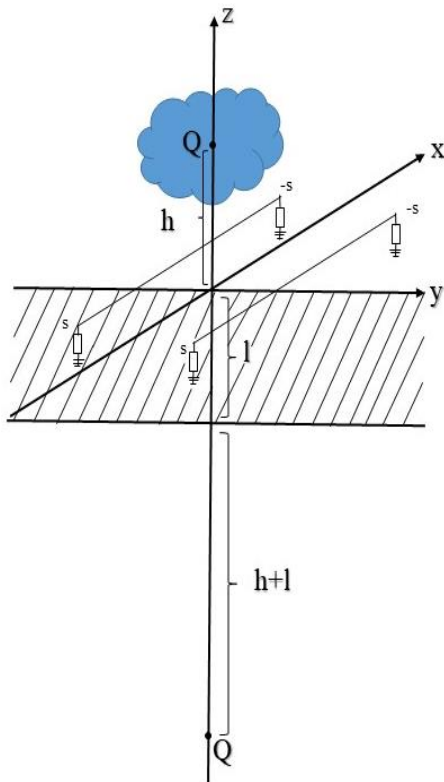
*Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова*

*Григорьев Юрий Михайлович, д.ф.-м.н.*

*[kharlampieva.s@bk.ru](mailto:kharlampieva.s@bk.ru)*

В районах Крайнего Севера действуют протяженные магистральные линии электропередач. В практике их эксплуатации нередки случаи тяжелых аварий, приводящих к выходу из строя ЛЭП. В условиях многолетней мерзлоты особенно много аварийных отключения ЛЭП вызывает грозовая деятельность. Это подтверждается практикой ПАО «Якутскэнерго» на территории Якутии.

В результате грозовой деятельности в линиях передач возникают токи и напряжения, которые и вызываются прямым попаданием молнии в линию, или индуцируются при ближнем разряде молнии при отсутствии прямого попадания. Индуцированные перенапряжения состоят из электромагнитной и электростатической компонент. Электромагнитная компонента вызвана действием переменного электромагнитного поля, порожденного электрическим импульсом в канале молнии. В литературе существует множество методов оценки грозовых перенапряжений. Практически во всех опубликованных работах при расчете наведенных токов и напряжений учитывают только электромагнитную наводку, а электростатическую часть не учитывают, так как при отсутствии многолетней мерзлоты значение этой компоненты относительно мало. Однако, в регионах с высоким удельным электрическим сопротивлением грунта, к которым относятся и регионы с многолетней мерзлотой, необходимо учитывать электростатическую компоненту наведенных токов и напряжений.



В данной работе представлена математическая модель электростатической компоненты индуцированных грозовых напряжений, называемой волна тока и напряжения (ВТН), в многопроводной линии передачи ограниченной длины в условиях многолетней мерзлоты.

Двухпроводная линия передачи состоит из 2 проводников и нулевого проводника (обратного провода), в качестве нулевого проводника в нашем случае выступает земля. Ось  $x$  направлена вдоль линии передачи. На Рис. 2.1. приведена схема линии, проводники линии на обоих концах заземлены через сосредоточенные сопротивления.

Обобщенная система телеграфных уравнений, описывающая такую МЛП имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial x} + C \frac{\partial V}{\partial t} + GV = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial x} + L \frac{\partial I}{\partial t} + RI = 0 \end{cases} \quad -S < x < S, \quad t > 0 \quad (1.1)$$

$$I(x, 0) = 0, \quad V(x, 0) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$$

Характеристическими параметрами в виде матриц являются  $R, C, L, G$  -сопротивление, емкость, индуктивность, коэффициент утечки.  $V$  -  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  начальный потенциал, электростатическая компонента 1 и 2 провода.  $V(x, t)$  и  $I(x, t)$ - соответственно вектор-

столбцы напряжений и токов. Краевые условия на концах линии передач имеют вид:

$$\begin{cases} i_{\bar{k}}(-s, t) = \frac{U_k(-s, t)}{R_{k1}}, \\ i_{\bar{k}}(s, t) = \frac{U_k(s, t)}{R_{k2}}, \end{cases}$$

где через  $S$  обозначена половина длины линии.

Расчеты показали, что параметры электростатической компоненты индуцированного напряжения (ВТН) в короткой линии передачи существенно растут с увеличением толщины многолетней мерзлоты, в частности, при толщине мерзлоты 1 км максимальное значение перенапряжения достигает величины 2700 кВ.

В этой модели наличие многолетней мерзлоты учитывается с помощью специальных начальных условий. Математическая модель сводится к решению начально-краевых задач для обобщенной системы телеграфных уравнений. Вычислительная реализация модели реализованы для случаев двух- и трехпроводных линий передач с конечной длиной. Результаты расчетов показывают, что параметры ВТН достигают значений, сравнимых с параметрами электромагнитной компоненты наведенных токов.

Список публикаций:

1. Борисова М. Н. Математическое моделирование волн тока и напряжения, индуцированных грозовыми разрядами в линиях передач в условиях многолетней мерзлоты / Диссертация. Якутск- 2011
2. Стекольников И.С. Физика молнии и грозозащита. – М.:Изд-во АН СССР, 1943.- 145 с.
3. Стекольников И.С. Изучение молнии и грозозащита. – М.:Изд-во АН СССР, 1955.- 160 с.
4. Юман М. Молния. Перевод с английского. Под ред. Н. В. Красногор.- Москва, 1972.- 328с.
5. Базелян Э. М. Физика молнии и молниезащита / Базелян Э. М., Райзер Ю. П.- Москва: Физматлит, 2011- 320с.
6. Ю. М. Григорьев. Расчет волны тока индуцированной разрядом молнии в кабельных линиях / Ю. М. Григорьев, С. Н. Еремеев, В. В. Наумов, П. И. Николаев / Десятый международный Вроцлавский симпозиум по электромагнитной совместимости, 26- 29 июня, 1990 г.- Вроцлав, 1990. – С. 247- 252.
7. Ю. М. Григорьев. Исследование влияние электромагнитного воздействия на кабельные линии / Ю. М. Григорьев, В. В. Наумов, П. И. Николаев / Физика высокоширотной ионосферы и распространение электромагнитных волн.- Якутск, 1998.- С. 126- 132.